数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 1-18

Jacobi 形式 について

立教大学理学部　荒川恒男

Shimura [Sh], Eichler-Zagier [E-Z] 等に依って導入された Jacobi 形式は、最近とみに幅広く研究されるようになった(♠)。例を挙げると Shintani, Murase, Sugano ([Mu1,2], [M-S], [Su]) らに依る、Jacobi 形式に付随する L-関数、Whittaker 関数等の最近の研究は特筆すべき卓抜な結果である。

Jacobi 形式の原型は Jacobi の theta 級数

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(2\pi i(n^2\tau + 2nz)\right) \quad (\tau \in \mathfrak{H},\ z \in \mathbb{C})$$

である。これは、τ の保型関数であり、z の abel 関数でもある。このように、大まかに捉えると、

Jacobi 形式= 保型形式 + theta 級数 (abel 関数)

と考えられ、Jacobi 形式は保型形式と abel 関数の両方としての良い性質を具有するものと期待される。

この一文では、Jacobi 形式は一面では theta 級数であるという視点を強調して、Jacobi 形式についての私的な解説を試みる。特に、Jacobi 形式の場合の Siegel 公式を幾分詳しく説明する。

(♠) この note で引用した文献以外の、Jacobi 形式関連の最近の結果を、参考文献の末尾に若干数列挙した。

1　定義

まず Sp_n を degree n の symplectic 群とする:

$$Sp_n = \left\{ g \in GL_{2n} \;\middle|\; {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

自然数 l に対し $G_n^J = G_{n,l}^J$ を次の形

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} a & & b & \\ & 1_l & & \\ c & & d & \\ & & & 1_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & & 0 & {}^t\mu \\ & 1_l & \mu & \rho \\ & & 1_n & \\ & & & 1_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & & & \\ \lambda & 1_l & & \\ & & 1_n & -{}^t\lambda \\ & & & 1_l \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_n, \quad \lambda,\ \mu \in M_{l,n}, \quad \rho \in Sym_l \right)$$

の元の成す Sp_{n+l} の部分群とする。(1.1) の形の元を簡単のため $(M, (\lambda, \mu), \rho)$ $\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_n\right)$ と書く。また、$(1_{2n}, (\lambda, \mu), \rho)$ の形の元の成す Jacobi 群 G_n^J の部分群 (Heisenberg 群) を $H_{n,l}$と記す。群 Sp_n は Jacobi 群 G_n^J の部分群と自然にみなされ、Sp_n は $H_{n,l}$ を正規化するので G_n^J は Sp_n と $H_{n,l}$ の半直積になる:

$$G_n^J = Sp_n \triangleright H_{n,l}.$$

$g = (M, (\lambda, \mu), \rho), \quad g' = (M', (\lambda', \mu'), \rho') \in G_n^J$ に対し、積 gg' は具体的には次式で与えられる:

$$gg' = (MM', (\lambda + \lambda^*, \mu + \mu^*), \rho + \rho' - \mu\,{}^t\lambda + \mu^*\,{}^t\lambda^*),$$
$$\text{where} \quad (\lambda^*, \mu^*) = (\lambda, \mu)M.$$

G_n^J は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群であり、$G_n^J(\mathbb{R})$ は Siegel-上半平面 $\mathfrak{H}_n$ と $l \times n$-行列環 $M_{l,n}(\mathbb{C})$ の直積 $\mathcal{D}_{n,l} = \mathfrak{H}_n \times M_{l,n}(\mathbb{C})$ に自然に作用する:

$$g(\tau, z) := (M\langle\tau\rangle, (z + \lambda\tau + \mu)(c\tau + d)^{-1}), \quad \text{where}$$
$$g = (M, (\lambda, \mu), \rho),\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}.$$

以下、$Sym_m^*(\mathbb{Z})$ を degree m の半整数対称行列の成す $\mathbb{Z}$-加群、$Sym_m^*(\mathbb{Z})^+$ を正定値半整数対称行列の成す $Sym_m^*(\mathbb{Z})$ の部分集合とする。

$S \in Sym_l^*(\mathbb{Z})^+$ を一つとり、固定して議論を進める。最初に保型因子 (factor of automorphy) を定義する。定義式は複雑であるが、実際にはそれほど厄介なものではない。

<u>**factor of automorphy**</u> $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $g \in G_n^J$, $(\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}$ は上記の通りとする。

$$J_{S,k}(g,(\tau,z)) := \det(c\tau+d)^k \times$$
$$e\Big(-\mathrm{tr}(S\rho) - \mathrm{tr}S[\lambda]\tau - 2\mathrm{tr}S(\lambda,z) + \mathrm{tr}(S[z+\lambda\tau+\mu]J(M,\tau)^{-1}c)\Big),$$

ここで、$e(w) = \exp(2\pi i w)$, $\quad S[\lambda] = {}^t\lambda S\lambda$, $\quad S(\lambda,z) = {}^t\lambda Sz$ と置いた。
保型因子は次の性質を持つ。

$$J_{S,k}(g_1g_2,(\tau,z)) = J_{S,k}(g_1,g_2(\tau,z))J_{S,k}(g_2,(\tau,z)) \quad (g_1,\ g_2 \in G_n^J(\mathbb{R}))$$

$G_n^J(\mathbb{R}))$ の元 g の $\mathcal{D}_{n,l}$ 上の関数 ϕ への作用 $\phi|_{S,k}g$ を上記保型因子を利用して次のように定める。

$$(\phi|_{S,k}g)(\tau,z) := J_{S,k}(g,(\tau,z))^{-1}\phi(g(\tau,z))$$

$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$, $\quad \Gamma_n^J := G_n^J(\mathbb{Z}) = \Gamma_n \triangleright\ H_{n,l}(\mathbb{Z})$ と置く。
$\mathcal{D}_{n,l}$ 上の関数 $\phi(\tau,z)$ が weight k, index S の Γ_n^J に関する Jacobi 形式であるとは、次の条件 (i), (ii) を満たすときをいう。

(i) $\phi|_{S,k}\gamma = \phi \quad$ for $\forall\gamma \in \Gamma_n^J$

(ii) 特に $n = 1$ の場合には以下の (1.2) の形の Fourier-Jacobi 展開を持つ（$n > 1$ のときは、この条件は不要)。

weight k, index S の Γ_n^J に関する Jacobi 形式の成す空間を $J_{k,S}(\Gamma_n)$ と記す。 更に、weight k, degree n の Siegel 保型形式の成す空間を $\mathfrak{M}_k(\Gamma_n)$ と記す。Jacobi 形式の notation で $l = 0$ のときは、$J_{k,S}(\Gamma_n) = \mathfrak{M}_k(\Gamma_n)$ と理

解する。

<u>**Fourier Jacobi expansion**</u>　$\phi \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ は次の Fourier-Jacobi 展開を有する:

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{N \in Sym_n^*(\mathbb{Z}),\ r \in M_{l,n}(\mathbb{Z}) \\ N - \frac{1}{4}{}^t r S^{-1} r \geq 0}} c(N, r) e(\mathrm{tr}(n\tau + {}^t r z)) \tag{1.2}$$

このとき、Fourier 係数は次の性質を持つ。

$$\begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & \zeta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} U & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} N^* & {}^t r^*/2 \\ r^*/2 & S \end{pmatrix}$$

$$\text{with} \quad U \in SL_n(\mathbb{Z}),\ y \in M_{l,n}(\mathbb{Z})$$

$$\Longrightarrow \qquad c(N^*, r^*) = c(N, r)$$

$l = 1$ で S が正整数、かつ $n = 1$ $(\Gamma_1 = SL_2(\mathbb{Z}))$ のとき、Jacobi 形式の空間 $J_{k,S}(\Gamma_1)$ については Eichler-Zagier [E-Z] により、色々な角度から詳しく研究された。

2 Jacobi 形式の作り方

Jacobi 形式の解析的な構成の仕方は大きく分けて次の 3 通りある。

(i) <u>**Siegel 保型形式の Fourier-Jacobi 展開の係数**</u>　degree $n + l$ の Siegel 保型形式 $f \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_{n+l})$ は次のように Fourier-Jacobi 展開される。$\tau \in \mathfrak{H}_n$, $z \in M_{l,n}(\mathbb{C})$, $\zeta \in \mathfrak{H}_l$ かつ $\begin{pmatrix} \tau & {}^t z \\ z & \zeta \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_{n+l}$ とするとき、

$$f \begin{pmatrix} \tau & {}^t z \\ z & \zeta \end{pmatrix} = \sum_{S \in Sym_l^*(\mathbb{Z}),\ S \geq 0} \phi_S(\tau, z) e(\mathrm{tr}(S\zeta))$$

このとき、$S > 0$ (正定値) ならば、$\phi_S(\tau, z) \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ である。

(ii) **Eisenstein series**　Γ_n^J の部分群　$\Gamma_{n,\infty}^J$ を次式で定義する:

$$\Gamma_{n,\infty}^J := \{\gamma \in \Gamma_n^J \mid 1|_{k,S}\gamma = 1\}$$

ただちに、導かれるように

$$\Gamma_{n,\infty}^J = \left\{\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, (0,\mu), \rho\right)\right\} \bigcap \Gamma_n^J$$

である。$k > 0$ を偶数とし、Eisenstein 級数を以下で定義する:

$$\begin{aligned} E_{k,S}^{(n)}(\tau, z): &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{n,\infty}^J \backslash \Gamma_n^J} (1|_{S,k}\gamma)(\tau, z) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{n,\infty}^J \backslash \Gamma_n^J} J_{S,k}(\gamma, (\tau, z))^{-1} \end{aligned}$$

$k > n + l + 1$ ならば、この Eisenstein 級数は絶対収束し、$E_{k,S}^{(n)}(\tau, z) \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ である。
もう少し一般化して、Klingen 式 Eisenstein 級数も定義できるが、それについては、Ziegler [Zi] 参照。

(iii) **theta 級数**　2 次形式の theta 級数から　Siegel 保型形式が構成されるように、適当な theta 級数 から Jacobi 形式が構成される。
$S \in Sym_l^*(\mathbb{Z})^+$ をとり、固定する。更に、

$$Q = \begin{pmatrix} \overbrace{M}^{m} & \overbrace{{}^t q/2}^{l} \\ q/2 & S \end{pmatrix} \in Sym_{m+l}^*(\mathbb{Z})^+$$

$(M \in Sym_m^*(\mathbb{Z})^+, \quad q \in M_{l,m}(\mathbb{Z}))$ に対して、theta 級数 $\theta_Q^{(n)}(\tau, z)$ を

$$\theta_Q^{(n)}(\tau, z) := \sum_{G \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z})} e\Big(\mathrm{tr}(Q[G]\tau) + \mathrm{tr}({}^t z(q \ \ 2S)G)\Big)$$

$$(\text{但し、}\quad (\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l},\quad Q[G] = {}^tGQG\ )$$

で定義する。このとき、

$$\det(2Q) = 1 \quad (2Q:\ \text{even unimodular}) \Longrightarrow \theta_Q^{(n)}(\tau, z) \in J_{\frac{m+l}{2}, S}(\Gamma_n)$$

これら 3 通りの作り方は相互に無関係ではなく、興味深い関係で結ばれている。例えば、(i) と (ii) の間の関係としては、Böcherer[Bo], Yamazaki[Ya], Ziegler[Zi] らにより次のことが知られている。
$E_k^{(n+1)}(Z) \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_{n+1})$ を degree $n+1$ の Siegel の Eisenstein 級数とし、その Fourier-Jacobi 展開を

$$E_k^{(n+1)}\begin{pmatrix} \tau & {}^tz \\ z & \zeta \end{pmatrix} = \sum_{S=0}^{\infty} e_S^{(n)}(\tau, z)e(S\zeta) \quad (\tau \in \mathfrak{H}_n,\ z \in \mathbb{C}^n,\ \zeta \in \mathfrak{H})$$

とする。

Theorem 1 (Böcherer-Yamazaki-Ziegler) S を正整数とするとき、

$$e_S^{(n)}(\tau, z) = const \times \sum_{a^2|S,\ a>0} \delta\left(\frac{S}{a^2}\right) E_{k,S/a^2}^{(n)}(\tau, az)$$

ここで、$\delta(\nu) = \sum_{d^2|\nu,\ d>0} \mu(d)\sigma_{k-1}\left(\frac{\nu}{d^2}\right)$、$const$ は容易に計算可能な定数。

Remark 定理をこの形に定式化したのは、Yamazaki[Ya] 及び Ziegler[Zi] である。彼らは Böcherer[Bo] の結果を証明に本質的に用いている。

(ii), (iii) の作り方の間の関係については、Sect.**5** で詳述する。

3 L-関数

Jacobi 形式に付随する L-関数 は Shintani によって導入され、その解析接続、関数等式に関する理論は、Shintani, Murase, Sugano ([Mu1,2], [M-S], [Su]) による非常に重厚な素晴らしい理論として結実した。ここで、その理論の短い解説を述べるべきであるが、紙面の制約もあり、筆者の手に余るので省略させて頂きたい。

4 半整数保型形式との対応

最初に或 theta 級数を導入し、それを用いて半整数保型形式の空間である Kohnen space を定義する。

theta 級数の空間

$S \in Sym_l^*(\mathbb{Z})^+$, $\tau \in \mathfrak{H}_n$ に対して $\Theta_{S,\tau}^{(n)}$ を正則関数 $\theta : M_{l,n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ で

$$\theta(z+\lambda\tau+\mu) = e\Big(-\mathrm{tr}(S[\lambda]\tau) - 2\mathrm{tr}S(\lambda, z)\Big)\theta(z) \quad \forall\lambda,\ \mu \in M_{l,n}(\mathbb{Z})$$

を満たすものの成す空間とする。
$L = M_{l,n}(\mathbb{Z})$ とおく。$r \in L/(2S)L$, $(\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}$ に対し、 theta 級数 $\theta_r(\tau, z)$ を

$$\theta_r(\tau, z) := \sum_{\lambda\in L} e\Big(\mathrm{tr}(S[\lambda+(2S)^{-1}r]\tau) + 2\mathrm{tr}S(\lambda+(2S)^{-1}r, z)\Big)$$

このとき、次が成り立つ。

(*) $\{\theta_r(\tau, z)\}_{r\in L/(2S)L}$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\Theta_{S,\tau}^{(n)}$ の基底を成す

(*) $\phi \in J_{k,S}(\Gamma_n) \Longrightarrow z$ の関数として $\phi(\tau, z) \in \Theta_{S,\tau}^{(n)}$. 従って、

(*) $\phi(\tau, z) \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ は theta 級数 $\theta_r(\tau, z)$ の線形結合として書ける:

$$\phi(\tau, z) = \sum_{r\in L/(2S)L} f_r(\tau)\theta_r(\tau, z) \quad \text{with} \quad f_r(\tau) \in \mathbb{C}$$

$f = (f_r(\tau))_{r\in L/(2S)L}$ は, 或 "theta multiplier system" 附きの保型形式である。

Kohnen space ([Ko], [Ib])

ここでは、$l = 1$, $S = 1$, $L = M_{1,n}(\mathbb{Z})$ とし、特別な theta 級数 $\theta^{(n)}(\tau)$ を

$$\theta^{(n)}(\tau) := \sum_{\lambda\in L} e(\lambda\tau{}^t\lambda) = \theta_0(\tau, 0) \qquad (\tau \in \mathfrak{H}_n)$$

で定義し、$\Gamma_0^{(n)}(4)$ を次で与えられる $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ の部分群とする:

$$\Gamma_0^{(n)}(4) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid c \equiv 0 \bmod 4 \right\}$$

保型因子 $j(M,\tau)$ $(M \in \Gamma_0^{(n)}(4))$ を次式で定義する:

$$j(M,\tau) := \frac{\theta^{(n)}(M\tau)}{\theta^{(n)}(\tau)} \qquad (M \in \Gamma_0^{(n)}(4))$$

このとき、任意の $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(4)$ に対して

$$(*) \qquad j(M,\tau)^2 = \varepsilon(M)\det(c\tau+d) \quad \text{with} \quad \varepsilon(M)^2 = 1$$

である。k は偶数とする。半整数保型形式の空間である Kohnen space $M_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ を以下の如く定義する。正則関数 $f : \mathfrak{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ が $M_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ の元であるとは f が次の 2 条件を満たすときとする:

(i) $f(M\tau) = j(M,\tau)^{2k-1} f(\tau) \quad \forall M \in \Gamma_0^{(n)}(4)$

(ii) $f(\tau)$ は次の Fourier 展開を持つ:

$$f(\tau) = \sum_{T \in S_n^*(\mathbb{Z}),\, T \geq 0} a(T) e(\mathrm{tr}(T\tau))$$

更に Fourier 係数 $a(T)$ は条件

" $a(T) = 0$ unless $T \equiv -\mu\,{}^t\mu \bmod 4S_n^*(\mathbb{Z})$ for $\exists \mu \in M_{n,1}(\mathbb{Z})$ "

を満たす。

任意の $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_n)$ $(l = 1,\ S = 1)$ は、前述のように

$$\phi(\tau,z) = \sum_{r \in L/2L} f_r(\tau)\theta_r(\tau,z)$$

として、theta 級数 $\theta_r(\tau, z)$ の線形結合の形に表わされる。このとき、

$$f_\phi(\tau) := \sum_{r \in L/2L} f_r(4\tau)$$

とおく。$f_\phi \in M^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ である。Jacobi 形式の空間 $J_{k,1}(\Gamma_n)$ は Kohnen space と同型になる（[E-Z], [Ib] 参照)。

Theorem 2 (Kohnen-Zagier ($n = 1$), Ibukiyama ($n > 1$)) 次の同型が成り立つ。

$$J_{k,1}(\Gamma_n) \simeq M^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4))$$

対応は $\phi \longrightarrow f_\phi$ で与えられる。しかも、この同型は Hecke 作用素の作用と compatible である。

Maass space と Saito-Kurokawa 予想

次に $n = 1$ の Jacobi 形式の空間 $J_{k,1}(\Gamma_1)$ と degree 2 の Siegel 保型形式の空間 $\mathfrak{M}_k(\Gamma_2)$ の Maass space と呼ばれる部分空間との対応について述べる。Maass space の概念は Saito-Kurokawa 予想（[Ku]）を解決するために Maass に依り導入された。

$F \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_2)$ がその Fourier 係数 $a_F(T)$ ($T \in Sym_2^*(\mathbb{Z})$, $T \geq 0$) に関して次の条件を満たすとき F は Maass space $\mathfrak{M}_k^M(\Gamma_2)$ の元であるという:

$$(*) \qquad a_F\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix} = \sum_{d|(n,r,m)\ d>0} d^{k-1} a_F\begin{pmatrix} mn/d^2 & r/2d \\ r/2d & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\forall\, T = \begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix} \in Sym_2^*(\mathbb{Z}),\ T \geq 0\right)$$

$\phi \in J_{k,1}(\Gamma_1)$ から $\mathfrak{H}_2$ 上の関数 $F_\phi : \mathfrak{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ を次のように構成する;
$\phi(\tau, z) = \sum_{n,\, r \in \mathbb{Z},\, 4n - r^2 \geq 0} c(n, r) e(n\tau + rz)$ を ϕ の Fourier-Jacobi 展開とし、

$$F_\phi\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \zeta \end{pmatrix} = \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ r \in \mathbb{Z} \\ 4mn - r^2 \geq 0}} A\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix} e(n\tau + rz + m\zeta)$$

と置く。但し、

$$A\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix} = \sum_{d|(n,r,m)\ d>0} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}, \frac{r}{d}\right)$$

である。このとき、

Theorem 3 (Maass [Ma], Eichler-Zagier [E-Z, Theorem 6.3])
$\mathbb{C}$-vector space としての次の同型が成り立つ。

$$J_{k,1}(\Gamma_1) \simeq \mathfrak{M}_k^M(\Gamma_2)$$

対応は $\phi \longrightarrow F_\phi$ で与えられ、この同型は Hecke 作用素の作用と compatible である（[E-Z] 参照)。

Saito-Kurokawa 予想は Maass, Andrianov, Eichler-Zagier らに依り解決された（[E-Z, Sect.6] 参照）が、次の図式で定式化される。予想を正確に記述することはここでは出来ないが、以下の図式とそれを対応する L-関数の言葉で記述したものが、Saito-Kurokawa 予想と理解されたい。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{M}_k^M(\Gamma_2) & \simeq & J_{k,1}(\Gamma_1) & \simeq & M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) & \underset{\iota}{\simeq} & \mathfrak{M}_{2k-2}(\Gamma_1) \\ F_\phi & \longleftarrow & \phi & \longrightarrow & f_\phi & & \end{array}$$

これらの同型は Hecke 作用素の作用と compatible であり、対応 $\iota : M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \longrightarrow \mathfrak{M}_{2k-2}(\Gamma_1)$ は Shimura 対応で与えられる。Shimura 対応 ι が本質的であるが、Jacobi 形式の空間 $J_{k,1}(\Gamma_1)$ が証明の仲介役を果たした点が興味深い。

5 Siegel 公式

2 次形式論の Siegel の定理を Jacobi 形式の場合に拡張する。
$S \in Sym_l^*(\mathbb{Z})^+$ を固定し、

$$Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z}) = \left\{ Q = \begin{pmatrix} M & {}^t q/2 \\ q/2 & S \end{pmatrix} \middle| M \in Sym^*_m(\mathbb{Z}),\ q \in M_{l,m}(\mathbb{Z}) \right\}$$

とおく。$Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})^+$ を正定値対称行列 $Q \in Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})$ の成す $Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})$ の部分集合とする。

S-class, S-genus

古典的な場合と同様に、$Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})$ の元の間に、類 (class) と 種 (genus) という二つの同値関係を導入する。

Definition (S-class, S-genus) $Q,\ Q' \in Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})$ が同じ S-class (resp. S-genus) に属するとは、$\exists\ \gamma = \begin{pmatrix} u & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix}$, $(u \in SL_m(\mathbb{Z}),\ y \in M_{l,m}(\mathbb{Z}))$ に対して $Q' = {}^t\gamma Q \gamma$ $\Bigg($ resp. $\forall p$ に対して、$\exists\ \gamma_p = \begin{pmatrix} u_p & 0 \\ y_p & 1_l \end{pmatrix}$, $(u_p \in GL_m(\mathbb{Z}_p),\ y \in M_{l,m}(\mathbb{Z}_p))$ を選べば $Q' = {}^t\gamma_p Q \gamma_p$ とでき、かつ、Q, Q' は同符合 $\Bigg)$ となることとする。

古典的な場合とまったく同様に、

(*) 与えられた Q の定める S-genus は有限個の S-classes から成る.

この S-classes の個数を $H(Q)$ と書き Q の S-class number と呼ぶ。S-class number はある直交群の類数になる。直交群 G を

$$\begin{aligned} G &= O^+(Q;S) \\ &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ x & 1_l \end{pmatrix} \middle|\ a \in SL_m,\ x \in M_{l,m},\ Q\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ x & 1_l \end{pmatrix}\right] = Q \right\} \end{aligned}$$

で定義する。G は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で

$$G(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ x & 1_l \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q}) \middle|\ a \in SL_m(\mathbb{Z}),\ x \in M_{m,l}(\mathbb{Z}) \right\}$$

と置く。$G(\mathbb{Z}_p)$ も同様に定義する。adele 群 $G(\mathbb{A})$ の極大部分群 $\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U} = \prod_{p<\infty} G(\mathbb{Z}_p) \times G(\mathbb{R})$$

で与えられる。類数 $H(Q)$ は次の $G(\mathbb{A})$ の double coset decomposition で特徴付けられる。

$$(\clubsuit) \qquad G(\mathbb{A}) = \bigsqcup_{j=1}^{H} G(\mathbb{Q}) g_j \mathcal{U}$$

ここで、 $H = H(Q)$ であり、g_j $(1 \leq j \leq H)$ は $G(\mathbb{A})$ の元である。

<u>表現の個数、local density</u>

$m,\ n \in \mathbb{Z}_{>0},\ m \geq n$ とする。$Q \in Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})^+$, $T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbb{Z})^+$ に対して

$$A(Q;T) = \sharp\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z}) \,\middle|\, Q\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix}\right] = T \right\}$$

$$A_{p^\nu}(Q;T) = \sharp\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \,\middle|\, Q\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix}\right] \equiv T \bmod p^\nu Sym^*_{n+l}(\mathbb{Z}) \right\}$$

とおき、さらに local density $\alpha_p(Q;T)$ を

$$\alpha_p(Q;T) = \lim_{\nu \to \infty} p^{-\nu(mn - n(n+1)/2)} A_{p^\nu}(Q;T)$$

とする。∞-素点に関する local density $\alpha_\infty(Q;T)$ は適当に定義する（正確な定義は [Ar] 参照)。

$$E(Q) = \sharp\left\{ \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in SL_m(\mathbb{Z}),\ x \in M_{l,m}(\mathbb{Z}),\quad Q\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ x & 1_l \end{pmatrix}\right] = Q \right\}$$

とおく。古典的の場合 (Siegel [Si]) と同様に、次の Siegel 公式が成り立つ。

Theorem 4 (Arakawa [Ar]) $m \geq n,\ Q,\ T$ は上記の通りとする。Q の定める *S-genus* に属する *S-classes* の完全代表系を $Q_1, \ldots, Q_H$ $(H = H(Q))$

とする。このとき、

$$\prod_{p\le\infty}\alpha_p(Q;T)=\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{H}\frac{A(Q_j;T)}{E(Q_j)}\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{H}\frac{1}{E(Q_j)}\right),$$

ここで、

$$\varepsilon=\begin{cases}1 & \ldots \text{ if } m>n+1 \text{ or } m=n=1\\ 2 & \ldots \text{ if } m=n+1 \text{ or } m=n>1.\end{cases}$$

この公式の左辺の無限積は収束する。

証明には、T.Ono [Ono], F.Sato [Sa] に依る等質空間上の Siegel 公式を用いる。

この定理は、古典的な場合に Siegel が実行したのと同様に、theta series と Eisenstein series の間の解析的 Siegel 公式に書き変えられる。

Theorem 5 (Analytic Siegel's formula [Ar]) 記号は Theorem 4 と同様とする。更に、$m>2n+l+2$, かつ $\det(2Q)=1$ を仮定する。このとき、

$$\left(\sum_{j=1}^{H}\frac{\theta_{Q_j}^{(n)}(\tau,z)}{E(Q_j)}\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{H}\frac{1}{E(Q_j)}\right)=E^{(n)}_{\frac{m+l}{2},S}(\tau,z).$$

<u>**example**</u>　$l=1,\ S=1$ 且つ

$$Q=\begin{pmatrix}M & {}^tq/2\\ q/2 & 1\end{pmatrix},\qquad \det(2Q)=1$$

とする。このとき、$m\equiv 7 \bmod 8$ である。
Q に対して

$$\widetilde{Q}=M-\frac{1}{4}{}^tqq$$

と置き、theta 級数 $\theta(\widetilde{Q};\tau)$ を

$$\theta(\widetilde{Q};\tau):=\sum_{G_1\in M_{m,1}(\mathbb{Z})}e(4\widetilde{Q}[G_1]\tau)\qquad(\tau\in\mathfrak{H})$$

で定義する。$\theta(\tilde{Q};\tau) \in M^{+}_{m/2}(\Gamma_0(4))$ である。Q の定める S-genus に属する S-classes の完全代表系を $Q_1, \ldots, Q_H$ $(H = H(Q))$ とする。このとき $m > 5$ ならば、

$$\sharp \qquad \left(\sum_{j=1}^{H} \frac{\theta(\tilde{Q}_j;\tau)}{E(Q_j)} \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{H} \frac{1}{E(Q_j)} \right) = \frac{1}{\zeta(2-m)} G^{+}_{m/2}(\tau)$$

である。$G^{+}_{k-1/2}(\tau)$ は Cohen 関数（[Co], [E-Z, p.65] 参照）と呼ばれる $M^{+}_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の元である（[E-Z, p.65] の記号では、$G^{+}_{k-1/2}(\tau) = \mathcal{H}_{k-1}(\tau)$)。

上記の $\sharp$ 式は半整数保型形式に対する Siegel 公式と考えられる。

theta correspondence

$Q \in Sym^{*}_{m+l}(S;\mathbb{Z})^{+}$, $\det(2Q) = 1$ とする。直交群 $G = O^{+}(Q;S)$ の double coset decomposition ($\clubsuit$) に於て $g_j \in G(\mathbb{A})$ を

$$g_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ \xi_j & 1_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ y_j & 1_l \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\alpha_j \in GL^{+}_{m}(\mathbb{Q}),\ \xi_j \in M_{l,m}(\mathbb{Q}),\ u_j \in \prod_{p<\infty} GL_m(\mathbb{Z}_p),\ y_j \in \prod_{p<\infty} M_{l,m}(\mathbb{Z}_p) \right)$$

と分解し、

$$Q_j = Q\left[\begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ \xi_j & 1_l \end{pmatrix} \right]$$

と置く。$Q_1, Q_2, \cdots, Q_H$ は Q の定める S-genus に属する S-classes の完全代表系を与える。G 上の保型形式の空間を

$$\mathcal{A}(G) := \{\varphi : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(\gamma g u) = \varphi(g) \quad \forall\gamma \in G(\mathbb{Q}),\ \forall u \in \mathcal{U}\}$$

とする。$\varphi \in \mathcal{A}(G)$ に対して

$$\vartheta(\varphi) = \sum_{j=1}^{H} \frac{\varphi(g_j)}{E(Q_j)} \theta^{(n)}_{Q_j}(\tau, z) \qquad (\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}$$

と定義すると、写像 $\vartheta : \mathcal{A}(G) \longrightarrow J_{(m+l)/2,S}(\Gamma_n)$ を考えることが出来る。最後に、問題を提出して終わりにしたい。

<u>**Problem**</u>　この写像 ϑ は Hecke 作用素の作用と compatible か？

参考文献

[Ar] Arakawa,T.: Siegel's formula for Jacobi forms. preprint. 1992

[Bo] Böcherer, S.: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. Math. Z. **183** (1983), 21-46.

[Co] Cohen, H.: Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters. Math. Ann. **217** (1975), 271-285.

[E-Z] Eichler, M. and Zagier, D.: The Theory of Jacobi Forms. Birkhäuser, Boston 1985.

[Ib] Ibukiyama, T.: On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights. preprint. 1991.

[Ko] Kohnen, W.: Modular forms of half integral weight on $\Gamma_0(4)$. Math. Ann. **248** (1980), 249-266.

[Ku] Kurokawa, N.: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. Invention Math. **49** (1978), 149-165.

[Ma] Maass, H.: Über eine spezialschar von Modulformen zweiten Grades. Inv. Math. **52** (1979), 95-104.

[Mu1] Murase, A.: L-functions attached to Jacobi forms of degree n. Part I. The basic identity. J. Reine Angew. Math. **401** (1989), 122-156.

[Mu2] Murase, A.: L-functions attached to Jacobi forms of degree n. II. Functional equation. Math. Ann. **290** (1991), 247-276.

[M-S] Murase, A. and Sugano, T.: Whittaker-Shintani functions on the symplectic group of Fourier-Jacobi type. Compositio Math. **79** (1991), 321-349.

[Ono] Ono, T.: Mean value theorem in adele geometry. J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 275-288.

[Sa] Sato, F.: Siegel's main theorem of homogeneous spaces. preprint. 1991

[Sh] Shimura, G.: On certain reciprocity laws for theta functions and modular forms. Acta Math. **141** (1978), 35-71.

[Si] Siegel, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. Math. **36** (1935), 527-606.

[Su] Sugano, T.: Jacobi forms and the theta lifting. preprint 1991

[Ya] Yamazaki, T.: Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.I.A. **33** (1986), 295-310.

[Zi] Ziegler, C.: Jacobi forms of higher degree. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **59** (1989), 191-224.

[(♠)] 以下、引用しなかった文献。

[Ar2] Arakawa,T.: Real analytic Eisenstein series for the Jacobi group. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **60** (1990), 131-148.

[Ar3] Arakawa,T.: Selberg zeta functions asoociated with a theta multiplier system of $SL_2(\mathbb{Z})$ and Jacobi forms. to appear in Math. Ann.

[Ar4] Arakawa,T.: Selberg zeta functions and Jacobi forms. to appear in Advanced studies in pure Math.

[Be1] Berndt, R.: Some remarks on automorphic forms for the Jacobi group. IHES/M/89/14.

[Be2] Berndt, R.: The continuous part of $L^2(\Gamma^J \backslash G^J)$ for the Jacobi group G^J. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **60** (1990),225-248.

[B-B] Berndt, R. and Böcherer, S.: Jacobi forms and discrete series representations of the Jacobi group. Math. Z. **204** (1990), 13-44.

[Gr] Gritsenko, V. A.: The action of modular operators on the Fourier Jacobi coefficients of modular forms. Math. USSR Sbornik **47** (1984), 237-268.

[Kl1] Klingen, H.: Metrisierungs theorie und Jacobiformen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **57** (1986), 165-178.

[Kl2] Klingen, H.: Über Kernfunktionen für Jacobiformen und Siegelsche Modulformen. Math. Ann. **285** (1989), 405-416.

[Ko2] Kohnen, W.: Non-holomorphic Poincaré type series on Jacobi groups. to appera in Math. Ann.

[Kr1] Kramer, J.: Jacobiformen und Thetareihen. manuscripta math. **54** (1986), 279-322.

[Kr2] Kramer, J.: A geometrical approach to the theory of Jacobi forms. Compositio Math. **79** (1991), 1-19.

[Mu3] Murase, A.: On an explicit formula for Whittaker-Shintani functions on Sp_2. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **61** (1991), 153-162.

[Na] Nagaoka, S.: On Eisenstein series for the Hermitian modular groups and the Jacobi groups. to appear in Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg

[Satoh] Satoh, T.: Jacobi forms and certain special values of Dirichlet series associated to modular forms. Math. Ann. **285** (1989), 463-480.

[Sk1] Skoruppa, N.-P.: Über den Zusammenhang zwischen Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts. Bonner math. Schriften 159, Bonn 1985.

[Sk2] Skoruppa, N.-P.: Explicit formulas for the Fourier coefficients of Jacobi and elliptic modular forms. Invent. Math. **102** (1990), 501-520.

[Sk3] Skoruppa, N.-P.: Developments in the theory of Jacobi forms. in "Internatinal Conference Automorphic Functions and their Applications, Khabarovsk, 1988", ed. by N. Kuznetsov, V. Bykovsky, The USSR Academy of Science, Khabarovsk, 1990, pp.167-185.

[Sk4] Skoruppa, N.-P.: Binary quadratic forms and the Fourier coefficients of elliptic and Jacobi modular forms. J. reine angew. Math. **441** (1990), 66-95.

[Sk5] Skoruppa, N.-P.: Heegner cycles, modular forms and Jacobi forms. Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux **3** (1991), 93-116.

[Su2] Sugano, T.: On the L-functions associated with Hermitian forms of genus 2. Bull. Fac. Educ. Mie Univ. **42** (Natur. Sect.) (1991), 1-28.

[S-Z1] Skoruppa, N.-P. and Zagier, D.: Jacobi forms and a certain space of modular forms. Invent. math. **94** (1988), 113-146.

[S-Z2] Skoruppa, N.-P. and Zagier, D.: A trace formula for Jacobi forms. J. reine angew. Math. **393** (1989), 168-198.

[Ta1] Takase, K.: A note on automorphic forms. J. reine angew. Math. **409** (1990), 138-171.

[Ta2] Takase, K.: On unitary representations of Jacobi group. preprint. 1991

[Ya2] Yamazaki, T.: Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series (II). J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. **36** (1989), 373-386.

[Za] Zagier, D.: Periods of modular forms and Jacobi theta functions. Invent. math. **104** (1991), 449-465.